Мы кучу раз решали уравнение Лапласа в самых разнообразных областях с с самыми разнообразными ГУ. Можем ли мы доказать существование и единственность единственность решения в произвольной области?
У нас вот была аналогичная теорема в курсе дифуров о существовании и единственности решения. Только там дифур был произвольным, а у нас он, хоть и многомерен, определённый: $\Delta u=0$.
Да, только путь будет долгим. Вот как это делает Боголюбов:
Сначала мы получим первую формулу Грина.
Потом из первой получим вторую формулу. Кстати, первая формула Грина больше нигде в ММФ не нужна, кроме как для вывода второй формулы Грина.
Из второй формулы Грина мы получим третью формулу Грина. Вот 2-я и 3-я формула Грина уже вроде как самодостаточны сами по себе, третья формула Грина даже помогает нам ввести функцию Грина (но это неточно).
После чего мы, используя третью формулу Грина, докажем вал мелких теорем.
По-моему, этих теорем будет четыре.
И только потом – существование и единственность.
Поехали!

63. Напишите первую и вторую формулы Грина. Каковы условия их применимости?
64. Напишите третью формулу Грина для двумерного и трехмерного случая.

$$\int\limits_D v(M)L_M[u(M)]dV = \oint\limits_S k(P)v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma - \\ - \int\limits_D k\,grad\,u\,grad\,v\,dV - \int\limits_D q(M)u(M)v(M)dV,$$

Это первая формула Грина.
А теперь давайте поменяем u и v местами. Получим

$$\int\limits_D \{v(M)L_M[u(M)] - u(M)L_M[v(M)]\}\,dV = \oint\limits_S k(P)\left\{v(P)\frac{\partial u}{\partial n} - u(P)\frac{\partial v}{\partial n}\right\}d\sigma.$$

Вычтем два последних тождества одно из другого. Получим вторую формулу Грина:

$$\int\limits_D \{v(M)L_M[u(M)] - u(M)L_M[v(M)]\}\,dV = \oint\limits_S k(P)\left\{v(P)\frac{\partial u}{\partial n} - u(P)\frac{\partial v}{\partial n}\right\}d\sigma.$$

Как запомнить первую формулу Грина? L – это оператор Штурма-Лиувилля, если что:

$$L_M[u] \equiv div\,\{k(M)grad\,(u)\} - q(M)u,$$

Изначально первую формулу Грина Боголюбов записал как

$$\int\limits_D v(M)div\,(k(M)grad\,u)\,dV = \oint\limits_S k(P)v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma - \int\limits_D k\,grad\,u\,grad\,v\,dV$$

Обозначим $\vec{A} = grad\ u$. Тогда формула запишется как

$$\iiint v\,div(k\vec{A})d^3V = \oiint v\,(k\vec{A}\vec{n})d^2S - \iiint (grad\ v, k\vec{A})d^3V$$

Естественно обозначить $k(\mathrm{M})\vec{A}(\mathrm{M}) = \vec{B}(\mathrm{M})$. Получим

$$\iiint v\,div(\vec{B})d^3V = \oiint v\,(\vec{B}\vec{n})d^2S - \iiint (grad\ v, \vec{B})d^3V$$

Ничего не напоминает? Сравните с формулой интегрирования по частям:

$$\int v\frac{du}{dx}dx = uv - \int u\frac{dv}{dx}dx$$

Первая формула Грина – это просто её многомерный аналог.

Пример её применения (а то когда я тоже изучал ММФ, думал, что эти формулы бесполезны). В моей научке (это правда!) мне потребовалось вычислить вариацию следующего функционала:

$$\delta\iiint \frac{dV(\vec{r})\big(gradΨ(\vec{r}), gradΨ(\vec{r})\big)}{2} = \iiint dV(\vec{r})\big(gradΨ(\vec{r}), \delta gradΨ(\vec{r})\big)$$

Сравним с первой формула Грина:

$$\iiint dV(\vec{r})\,v(\vec{r})\Delta u(\vec{r}) = \iint v(\vec{r})\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}d\vec{S}(\vec{r}) - \iiint dV(\vec{r})\big(grad\ u(\vec{r}), grad\ v(\vec{r})\big)$$

$$\iiint dV(\vec{r})\big(grad\ u(\vec{r}), grad\ v(\vec{r})\big) = \iint v(\vec{r})\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}d\vec{S}(\vec{r}) - \iiint dV(\vec{r})\,v(\vec{r})\Delta u(\vec{r})$$

Подставляем $u(\vec{r}) = Ψ(\vec{r}), v(\vec{r}) = \delta Ψ(\vec{r})$

$$\iiint dV(\vec{r})\ \big(gradΨ(\vec{r}), \delta gradΨ(\vec{r})\big)$$
$$= \iint \delta Ψ(\vec{r})\frac{\partial Ψ(\vec{r})}{\partial n}d\vec{S}(\vec{r}) - \iiint dV(\vec{r})\,\delta Ψ(\vec{r})\Delta Ψ(\vec{r})$$

Вариация подсчитана, т.к. теперь δ стоит только с $Ψ(\vec{r})$, без всяких градиентов.

Возвращаясь к формуле Грина в рамочке

$$\boxed{\int\limits_D v(M)L_M[u(M)]dV = \oint\limits_S k(P)v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma - \int\limits_D k\,grad\,u\,grad\,v\,dV - \int\limits_D q(M)u(M)v(M)dV,}$$

скажем, что она получается из

$$\int\limits_D v(M)div\,(k(M)grad\,u)\,dV = \oint\limits_S k(P)v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma - \int\limits_D k\,grad\,u\,grad\,v\,dV$$

тем, что раз мы в левой части заменяем div(grad…) на L, то и в правой мы должны добавить слагаемое с q(M), коли его содержит L:

$$L_M[u] \equiv div\,\{k(M)grad\,(u)\} - q(M)u,$$

Надеюсь, что мой рассказ помог их запомнить ☺

Важное определение.

Определение 8.1.1. *Функция $u(M) \in C^{(2)}(D)$ называется гармонической в области D, если $\triangle u(M) = 0$ при $M \in D$.*

Например, $u(M) = r^n$ — гармоническая функция.

Определение верно, а ВОТ ПРИМЕР НЕВЕРНЫЙ!!! r^n будет гармонической функцией, только если n=1. А вот уже для n=2, например, $r^2=x^2+y^2+z^2$, и если мы возьмём от этого лапласиан, то получим 2+2+2=6, а вовсе не 0.
ТАКИМ ОБРАЗОМ, У БОГОЛЮБОВА В ЛЕКЦИЯХ ОШИБКА!!!

Понятие гармонической функции было и в ТФКП. Там функция u называлась гармонической, если

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

Тогда для неё существовала функция v(x,y), что f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y) была аналитической.
Аналогично из любой аналитической функции f(z)=f(x+iy) можно получить гармоническую. Даже две: Re f(x,y) и Im f(x,y).
Однако мы рассматриваем функции не только двух переменных, но и трёх. Там условие равенства нулю лапласиана, хоть и очень похоже

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

Но тут уже провести аналогию с ТФКП не сможем.

Хорошая, кстати, новость: доказательств со ссылкой на ТФКП не будет. Боголюбов их не даёт, всё заново доказывает. Красавчик. Мы тоже так сделаем.

Теперь займёмся выводом третьей формулы Грина.

Выберем какую-нибудь точку M_0 во всём пространстве.
Введём функцию

$$\boxed{v_0(M) = \frac{1}{r_{MM_0}}.}$$

Можно убедиться, что её лапласиан 0. Хочется назвать её гармонической в D. Однако это так, только если M_0 лежит снаружи области, а вот если внутри, то в M_0 у неё проблемы с существованием, и о её лапласиане в этой точке говорить и вовсе не приходится, и мы можем говорить о гармоничности $v_0(M)$ только в $D \backslash M_0$.

Чего мы хотим? Мы хотим подставить эту функцию во 2 формулу Грина, где в роли $L_M[v_0]$ выступит лапласиан. И тогда $L_M[v_0]$ занулится, и всё у нас будет хорошо.
Если M_0 лежит вне $\bar{D}$, то $v_0(M)$ непрерывна и мы действительно можем так сделать. Пишем вторую формулу Грина:

$$\int\limits_D (v_0 \triangle u - u \triangle v_0)\, dV = \oint\limits_S \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma$$

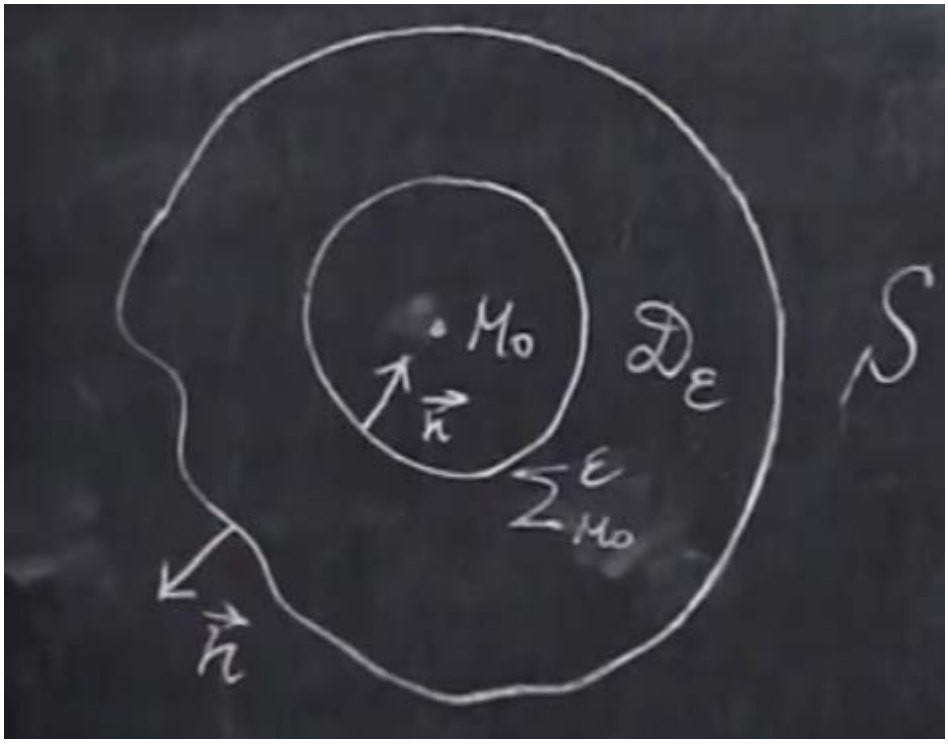
Т.к. $v_0(M)$ гармонична (т.е. лапласиан от неё равен 0), то упростим до

$$\int\limits_D v_0 \triangle u \; dV = \oint\limits_S \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma$$

И пока в таком виде оставим.

А если M_0 лежит в D (а обычно так и есть), то у нас проблема: вторая формула Грина требует непрерывности функции в области. А у нас в одной точке с непрерывностью проблема.
Эту проблему, как сказал Боголюбов, можно решить путём работы с обобщёнными трёхмерными функциями, но обобщённые функции – это всегда противно. Поэтому сделаем, как Боголюбов: отредактируем область. Возьмём точку M_0 и окружим её шаром радиусом ε. И этот шар мы из D вырезаем. Полученную область назовём D_ε. Сферу – внутреннюю поверхность – обозначим как Σ_ε.
(да, и мы будем рассматривать трёхмерный случай, наиболее важный для нас. Про двумерный скажем потом)

Теперь мы для D_ε уже можем применить формулу Грина. Однако теперь в правой части будет два слагаемых – интеграл по внешней поверхности и по внутренней. Нормаль для внешней поверхности будет торчать наружу, а для внутренней внутрь:



Итак, вторая формула Грина запишется как

$$\int\limits_{D_\varepsilon} (v_0 \triangle u - u \triangle v_0)\, dV = \oint\limits_S \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma + \oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}} \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Используя знание о гармоничности v_0 в D_ε, сразу перепишем как

$$\int\limits_{D_\varepsilon} v_0 \triangle u \;\, dV = \oint\limits_S \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma + \oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}} \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Займёмся подсчётом интеграла по Σ_ε.

Так как v_0 мы знаем, мы можем явно подсчитать обе производные по нормали на каждой из поверхностей. Правда, поверхность S в общем случае может быть довольно сложной и кривой. А вот Σ_ε – это сфера. Там всё легко:

$$\left. \frac{\partial v_0}{\partial n} \right|_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}} = -\left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Используем это знание в подсчёте интеграла:

$$I_1 = \oint\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}} u\frac{\partial v_0}{\partial n}d\sigma = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2}u(M^*)4\pi\varepsilon^2}_{\text{теорема о среднем}} = 4\pi u(M^*),\ \ M^* \in \Sigma^{\varepsilon}_{M_0},$$

Интеграл от u по сфере Σ_ε мы заменили согласно теореме о среднем на значение u в какой-то точке M* на этой сфере.

Теперь подсчитаем второй интеграл по Σ_ε.

$$I_2 = \oint\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}} v_0\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

v_0 на поверхности сферы – это $1/\varepsilon$, а интеграл от производной u по нормали по сфере сфере Σ_ε

$$I_1 = \oint\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}} u\frac{\partial v_0}{\partial n}d\sigma = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2}u(M^*)4\pi\varepsilon^2}_{\text{теорема о среднем}} = 4\pi u(M^*),\ \ M^* \in \Sigma^{\varepsilon}_{M_0},$$

мы заменили согласно теореме о среднем на значение u в какой-то точке M** на этой сфере.

Выполним предельный переход: устремим ε к нулю. Тогда

$$I_2 \to 0,\ \ I_1 \to 4\pi u(M_0).$$

И значение интеграла по Σ_ε будет стремиться к $4\pi u(M_0)$.

Вернёмся к

$$\int\limits_{D_\varepsilon} v_0\,\Delta u\ dV = \oint\limits_{S}\left(v_0\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v_0}{\partial n}\right)d\sigma + \oint\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}}\left(v_0\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v_0}{\partial n}\right)d\sigma$$

С учётом предельного перехода это запишется как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} v_0\,\Delta u\ dV = \oint\limits_{S}\left(v_0\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v_0}{\partial n}\right)d\sigma + 4\pi u(M_0)$$

Так как у правой части предел есть (он и записан), то предел есть и у левой части. Запишем как несобственный интеграл

$$\int\limits_{D} v_0\,\Delta u\ dV = \oint\limits_{S}\left(v_0\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v_0}{\partial n}\right)d\sigma + 4\pi u(M_0)$$

Несобственный интеграл – вещь такая, может существовать, а может, и нет. Вот здесь мы доказали, что он существует.

Сравним с тем результатом, который мы получили для M_0 вне $\bar{D}$:

$$\int\limits_D v_0 \triangle u \; dV = \oint\limits_S \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma$$

Они очень похожи, но различаются добавлением добавочного слагаемого.

Мы рассмотрели два случая:

1) M_0 лежит вне $\bar{D}$

2) M_0 лежит в D

Как вы понимаете, есть ещё и третий случай: M_0 лежит на поверхности S. В нём мы точно также окружим M_0 шариком, но когда дело дойдёт до интегрирования по сфере, мы будем интегрировать не по сфере, а по её половине. Из-за этого везде 4π заменится на 2π.

Итоговая запись третьей формулы Грина будет:

$$\Omega_3 \, u(M_0) = \oint\limits_S \left\{ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right\} d\sigma - \int\limits_D \frac{\triangle u(M)}{r_{MM_0}} dV_M,$$

где

$$\Omega_3 = \begin{cases} 4\pi, & M_0 \in D, \\ 2\pi, & M_0 \in S, \\ 0, & M_0 \notin \bar{D} \end{cases}$$

Где мы вдобавок написали явный вид функции v – расстояние между двумя точками. P – переменная точка интегрирования, все они лежат на поверхности S.

Для плоского случая формула получается аналогично и результат будет

$$\Omega_2 \, u(M_0) = \oint\limits_\Gamma \left\{ \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right\} dl_0 - \\ - \int\limits_G \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \triangle u(M) dS_M,$$

где

$$\Omega_2 = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in G, \\ \pi, & M_0 \in \Gamma, \\ 0, & M_0 \notin \bar{G}. \end{cases}$$

Давайте я кратенько скажу, для чего нужна третья формула Грина – для поиска u… в любой точке M_0. Да, выглядит странно: мы находим $u(M_0)$ через правую часть, где у нас аж два неприятных интеграла.
Но интеграл на поверхности мы всегда сможем подсчитать, потому что мы знаем всё движуху, проходящую на S в любой момент времени (это играничные условия). Что касается интеграла по объёму, то там участвует не u, а лапласиан от него. А лапласиан u зачастую будет иметь более простую формулу, чем само u.

Что вам напоминает третья формула Грина? Мне она напоминает… дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа.

$$U(P) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{Ce^{-ik(\rho_1+\rho)}}{\rho_1\rho} \frac{i}{2\lambda}\left[\cos\varphi_1 + \cos\varphi\right] d\sigma.$$

Идея та же – возмущение в точке (какой-то) ищется как интеграл по поверхности, её окружавшую.
Собственно, дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа через эти формулы и получается, но мы тогда были в 4 семестре и ещё не знали ММФ ☺

Особенно приятен тот факт, что все три формулы Грина справедливы для любых функций u (лишь бы у них было всё хорошо с непрерывностью и дифференцируемостью), а не только гармонических.

Теперь перейдём к свойствам гармонических функций. Теперь u – не простая функция, а гармоническая.

Помните, я вам обещал в самом начале вал мелких теорем? Вот как мы как раз с ним подошли.

67. Сформулируйте теорему Гаусса и теорему о среднем для гармонических функций.

Теорема Гаусса

Если ЗАМКНУТАЯ поверхность/кривая Σ принадлежит D, а функция u гармонична, то

$$\boxed{\oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,}$$

Доказательство. Подставим v_0=тождественной 1 во вторую формулу Грина

$$\int\limits_D (v_0 \triangle u - u \triangle v_0)\, dV = \oint\limits_S \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma$$

Занулится почти всё. Левая часть занулится полностью, т.к. будут равны нулю оба лапласиана; в правой части занулится производная константы, выживет только интеграл от ∂u/∂n, которому и придётся стать нулём.

Замечание: если u удаётся доопределить на S, сохраняя её непрерывность, то и Σ может принадлежать не только D, но и S. Боголюбов это записал так:

Если $u(M) \in C(\bar{D})$, *то возможно* $\Sigma^R_{M_0} \subset \bar{D}$.

Иллюстрация для понимания теоремы. Вспомним, что лапласиан скалярного потенциала φ = 0 (если все заряды покоятся), если в этой точке нет зарядов. Возьмём область пространства, где нет зарядов. Тогда, взяв произвольную поверхность, её окружающую, получим, что поток ∂φ/∂n через неё будет 0. А ∂φ/∂n – это напряжённость E. Получили, что поток напряжённости через поверхность 0.

Отсюда видим, что поиск гармоничной функции, когда ГУ второго рода имеет решение не всегда. Вот мы взяли бодро какую-то поверхность/кривую Σ, задали на ней ГУ 2-го рода… после чего обязательно должны проверить равенство нулю интеграла

$$\boxed{\oint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,}$$

По этой поверхности. Если это не 0 – задачу можно не решать, сразу понятно, что решения не будет.

А если ГУ будет 1 рода, то решение будет всегда и единственно.

Формула среднего значения.

Если мы проведём сферу/круг, целиком лежащую в D, то значение u() в её центре будет равно среднему арифметическому u() на сфере/круге, т.е.

Теорема 8.3.2 (Формула среднего значения). *Пусть сфера* $\Sigma_{M_0}^R \subset D$. *Тогда*

$$\boxed{u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint\limits_{\Sigma_{M_0}^R} u(P) d\sigma_P.}$$

(интегрируем по окружности и делим на ее площадь)
Если $u(M) \in C(\bar{D})$, *то возможно* $\Sigma_{M_0}^R \subset \bar{D}$.

Докажем её. Достанем третью формулу Грина для функции u и функции v_0=1/r (где r – расстояние до M_0).

$$\int\limits_D v_0 \triangle u \; dV = \oint\limits_S \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma + 4\pi u(M_0)$$

Т.к. u по условии этой теоремы (о среднем значении) гармонична, то левый интеграл моментально оказывается нулём. Теперь считаем интеграл по поверхности S. Т.к. у нас сфера, то он считается достаточно легко.

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_\Sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\sigma.$$

Учитывая, что

$$u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}, \; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ из } (8.1),$$

получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint\limits_\Sigma u(P) d\sigma_P.$$

68. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для гармонических функций.

Принцип максимума.

Если гармоничная функция u(M) не константа, то своего максимума она может достигать лишь на границе.

А т.к. u(M) непрерывна, это означает (другая формулировка), что одно из значений на границе будет максимумом.

Это доказывается очень просто. Итак, мы нашли точку ВНУТРИ, которая такая-сякая, объявила себя максимумом. Дерзкая вообще.

Т.к. она внутренняя, мы окружаем её сферой/кругом. По формуле среднего значения она должна быть равна среднему арифметическому на сфере. А мы напомним, что она uber allen. Противоречия не будет лишь тогда, когда все точки на сфере равны ей.
Но мы можем менять радиус сферы/круга. И постоянно, чтобы наш центр Вселенной под названием дерзкая точка, был максимален, всем точкам на сфере придётся быть такими же.
В итоге у нас уже солидная часть области D оказалась константой.
Те точки, которые оказались равной кумиру-дерзкой точке, сообразили, что т.к. они ей равны, то они тоже максимальны! И сферы/круги можно проводить уже и от них. В итоге мы постепенно доказываем, что вся область D константа.

Похожая теорема была в ТФКП, доказывалась аналогично.

Теперь мы НАКОНЕЦ-ТО готовы доказать единственность решения дифура Лапласа внутри поверхности/кривой, если на ней заданы ГУ 1 рода.
Но мы на самом деле сейчас докажем даже более общее решение: **единственно решение дифура Пуассона внутри поверхности/кривой, если на ней заданы ГУ 1 рода.**

69. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий Дирихле. Каким методом она доказывается?

Вот у Боголюбова уравнение Лапласа, а у меня аж уравнение Пуассона, во как я крут.
Напомню отличие дифура Лапласа от дифура Пуассона (с последним доселе мы не работали):

$$\triangle u = 0$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta u(M) = f(M)$$

Как мы видим, Пуассон является более общим случаем Лапласа.

Пример. В случае электростатики
$\Delta\varphi(M)=4\pi\rho(M)$
Лапласиан в каждой точке M равен объёмной плотности заряда, домноженной на 4π.

Доказательство единственности решения дифура Пуассона внутри граничной поверхности/кривой:
Пусть есть два решения – u(M) и v(M). Рассмотрим w(M), которую мы определению положим u(M) - v(M). w(M) гармонична. Граничные условия для неё какие? Очень простые: на границе w=0 всюду.
По принципу максимума у функции должен быть на границе максимум.
А выбор максимумов на границе у нас небогатый: во всех точках 0.
Значит, 0 – максимум w(M).
Аналогично 0 – минимум w(M).
Вывод: w(M) – тождественный нуль. Ч.т.д.

Это всё мы разбирали ГУ 1 рода. А что, если третьего или второго?
Про дифур Пуассона мы уже ничего сказать не сможем. А вот про дифур Лапласа можем. Про него нас и спрашивают:

70. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?
71. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий второго рода? Обоснуйте ответ.

Оказывается, что если ГУ третьего рода, то всё ОК, как и в случае ГУ первого рода. А вот если ГУ второго рода, то должно выполняться одно условие:
Коль мы требуем, чтобы du/dn на границе было равно некоей неоднорости f(P), то интеграл f(P) по поверхности должен быть ноль. А уж если это условие выполнено, то решений бесконечного много – они определены с точностью до константа.
Давайте обсудим, как так вышло. Откуда требование равенства нулю интеграла от неоднородности? А потому что можно доказать, что если u гармоническая, то интеграл от du/dn по любой замкнутой поверхности (кривой, если в 2D) будет 0. А нам как раз сказано, что du/dn = данная там неоднородность. Ну, ребята, если мы хотим найти гармоническую функцию, то нам придётся сказать, что интеграл от той неоднородности по поверхности/кривой тоже будет 0.

А почему решений бесконечно много, совсем очевидно. Какие требования к u? Чтобы du/dn было чего-то там, да Δu был чего-то там. Это операторы первой и второй производной. Естественно, мы можем прибавлять любую константу и всё будет ОК.

Это были всё внутренние задачи: мы взяли некую область в 2D или 3D, и требуем выполнения уравнения Лапласа внутри. Но мы можем потребовать выполнения Лапласа и снаружи. Что будет в этом случае с существованием-единственностью?

75. В чем состоит различие в постановках и свойствах решений внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях?

Какой интересный вопрос! Кажется, что для внешних задач будет difference в 2D и 3D. И да, отличие есть.

И в том, и в другом случае мы требуем $\Delta u=0$ снаружи границы, а на самой границе – выполнения ГУ Дирихле. Ну что, достаточно? Оказывается, нет, решений бесконечно много. Нужно ещё условие.

И это условие – функция должна быть регулярной.

72. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух и трех переменных.

Функция в 3D называется регулярной, если она равномерно стремится к 0 на бесконечности.

Функция в 2D называется регулярной, если она всего лишь ограничена на бесконечности.

Да, именно такое корявое определение нужно, чтобы можно было сформулировать теорему

73. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Каким методом она доказывается?

74. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?

«Существует одна ***регулярная*** гармоническая функция, удовлетворяющая ГУ» (если ГУ Неймана – то с точностью до константы). Оно справедливо и в 2D, и в 3D, разница лишь в определении регулярности.

Если мы регулярность и в 2D, и в 3D определим как требование ограниченности, то в 3D мы потеряем единственность.

Если мы регулярность и в 2D, и в 3D определим как требование равномерной сходимости к 0, то в 2D мы потеряем существование.

Так что вот такое корявое определение, но так нужно.

Кратко обсудим идею доказательства, раз с нас спрашивают. В 3D вновь принцип сравнения, бла-бла-бла. А вот в 2D обязательно напишите словосочетание «барьерная функция». Она появляется один раз в ММФ как раз для доказательства той теоремы.